研究ノート

ベイズ統計学に基づく統計処理パッケージプログラム
——μCADA の開発——

鈴　木　敏　明

1.　ベイズ統計学について

(1)　ベイズ統計学の歴史と現状

現代の統計理論を大きく二つに分けると，Fisher や Neyman-Peason 流の考えかたに代表される所謂「古典的」統計学の立場と，標題に示したベイズ統計学の立場とになる。

ベイズ統計学という名称はベイズの定理の発見者である Thomas Bayes (1763) に因んだものであるが，Bayes 自身が今日のベイズ統計学の体系を理論化したということではない。ベイズ統計学の本格的な研究は，Savage (1954) や Schlaifer (1959) に始まるといわれている。従って，現在までの実質的な研究の歴史は30年程度である。しかし，Savage や Schlaifer の思想が広く知られるようになるにつれて，ベイズ統計学は，従来の古典的立場に付け加えられるメニューの一項目なのではなく，18世紀以来の古典的統計学全体と置き換えられるべきまったく新しい優れた理論体系であるということが認識されるようになってきた。

ベイズ統計学の観点は，常識の持つ合理性を整理し洗練したものであり，そこから得られる諸々の結論は，常識のレベルでの推論や判断と非常によく fit することが多い(Savage, 1961)。また，ベイズ的な確率の解釈の仕方や，サンプル情報だけでなく，サンプルを手に入れるに先立って既に持っている事前の知識をも活用するという方法論は，「同一条件下の無限回の反復試行」を想定しにくいことの多い体育学を含めた行動科学の分野に対しては，とりわけ有望な応用可能性を持っているといえる。

さらに，このような応用上のメリットに加えて，ベイズ統計学の理論体系がシンプルで内部矛盾がないものであることも大きな魅力である。実際のデータ処理にあたって，さまざまの前提を恣意的に設定している古典的統計学の手法を無批判に踏襲するだけという状態は（例えば，危険率の決め方など），一部の手法においては数値的にベイズ統計学の解に近い値が得られることはあるものの，あくまで便宜的な間に合わせにすぎない。

応用上・理論上明らかなメリットがあるにもかかわらず，統計学利用者の大半がいまだに古典的統計学の信奉者であるということにはいくつかの理由が考えられる。そのひとつは，統計学の手法を使う研究者や実務家の多くが，大学等で統計学を学ぶにあたっては専ら古典的観点に立つ手法のみを伝授されてきているということである。このことはすなわち，伝授する側もほとんどが non-Bayesian であったということを意味する。しかし，この問題は，統計学の研究者および利用者の世代交替が進むことによって徐々に解決されるであろう。例えば，University College London では D. V. Lindley らによる統計学のコースが設置されているが，そこで講じられるのはベイズ統計学であり，古典的統計学の理論は統計学史の資料として言及されるにすぎない。

ベイズ統計学への移行がスムースに行われな

いもうひとつの理由としては，ベイズ統計学の理論と応用の両面をカバーした適当な教科書が存在しなかったということがあげられる。しかし現在では，前記の2冊の他に，Lindley(1965), DeGroot (1970), Winkler (1972), Box and Tiao (1973), Phillips (1973), Novick and Jackson (1974) 等の様々の記述レベルのテキストが数多く出版されている。また，Savage (1961), Edwards et al. (1963), Lindley (1972), 繁桝 (1976, 1983) のような，テキストではないが，ベイズ統計学を古典的統計学に比較した場合のメリット等について，簡潔にまとめられている良質の review もいくつか発表されている。個々のベイズ的手法の開発とか応用例に関する論文の数も年々増加しつつある。このように，ベイズ統計学を学ぶ上での文献や資料上の制約も緩和されつつある。

(2)　ベイズ統計学の概説

ここでは，ベイズの定理およびその定理を構成する要素の意味づけを通して，ベイズ統計学の論理について簡単に説明する。

n 個の要素からなる観測値ベクトルを $\underline{x}'=(x_1, \cdots, x_n)$，推定の対象となる m 次元のパラメータベクトルを $\underline{\theta}'=(\theta_1, \cdots, \theta_m)$，$\underline{\theta}$ 所与の $\underline{x}$ の確率分布を $p(\underline{x}|\underline{\theta})$，$\underline{x}$ 所与の $\underline{\theta}$ の確率分布を $p(\underline{\theta}|\underline{x})$，$\underline{x}$ と $\underline{\theta}$ の確率分布をそれぞれ $p(\underline{x})$，$p(\underline{\theta})$とすると，

$$p(\underline{x}|\underline{\theta})\,p(\underline{\theta})=p(\underline{x},\underline{\theta})=p(\underline{\theta}|\underline{x})\,p(\underline{x}) \qquad [1]$$

$\underline{x}$ 所与の場合の $\underline{\theta}$ の分布は〔1〕より

$$p(\underline{\theta}|\underline{x})=p(\underline{x}|\underline{\theta})\,p(\underline{\theta})/p(\underline{x}) \qquad [2]$$

ここで，

$$p(\underline{x})=\begin{cases}\int p(\underline{x}|\underline{\theta})p(\underline{\theta})d\underline{\theta} & \underline{\theta}\text{が連続変量のとき}\\ \sum p(\underline{x}|\underline{\theta})p(\underline{\theta}) & \underline{\theta}\text{が離散変量のとき}\end{cases} \qquad [3]$$

〔3〕は〔2〕の分布を proper にするための定数部分なので，〔2〕を次のような省略形で表すことが多い。

$$p(\underline{\theta}|\underline{x})\propto p(\underline{x}|\underline{\theta})\,p(\underline{\theta}) \qquad [4]$$

〔2〕，〔4〕はベイズの定理と呼ばれるもので，ベイズ統計学においては中心的な意味を持つ式である。ベイズの定理において，$p(\underline{\theta})$ は $\underline{\theta}$ の事前分布 (prior distribution) と呼ばれ，データを観測する前のパラメータ $\underline{\theta}$ に関する知識の状態を表わしている。$p(\underline{\theta}|\underline{x})$ は，データ $\underline{x}$ を入手したことに条件づけられた $\underline{\theta}$ の分布であり，$\underline{\theta}$ の事後分布 (posterior distribution) と呼ばれる。これは，データ $\underline{x}$ を得たことによって変化したパラメータ $\underline{\theta}$ に関する知識の状態を表わしている。$p(\underline{x}|\underline{\theta})$ は，データが採られるモデル分布を意味し，尤度関数 (likelihood function) と呼ばれる。標本中のすべての情報は尤度の中に含まれている。ベイズの定理とは，尤度と事前分布とから事後分布を得るための式であるということができる。古典的統計学ではパラメータは未知の定数であると考えるので，パラメータの分布などという考え方はそもそも出て来ようがない。そこで，推論は尤度だけから行なわれるわけである。しかし，現実の統計的分析を行なう状況を考えた場合は，パラメータについての情報を新たに得ようとするときでも，それについて何らかの知識を事前に持っていることの方が普通であり，意識的・無意識的にその知識を活用していることが多い。そうだとするならば，そのような事前の情報を考慮しないという古典的統計学の方法は，「常識」的思考様式に反する極めて不合理な態度であると言わなければなるまい。ベイズ統計学では，パラメータは未知の定数ではなく，それが一連の値をとることについての確率的表現をすることができると考える。すなわち，未知なるものはすべて変数 (variable) であって，変数についてはその確率分布を考えることができるとするのである。

このように，ベイズの定理を使って得られる事後分布には，データから得られる情報と，データを得る前に既に持っていた情報とが統合されているわけである。つまりベイズ統計学では，分析に必要とされるすべての情報は事後分

布中に含まれると考えるのである。なお，事前の知識がまったくの白紙あるいは無知の状態である場合，および，共通理解として意図的にそのような状態を想定する場合には，事前分布としては一様分布あるいは尤度関数の主要な範囲において局所的に一様分布型となる分布を用いる。そのような分布のことを NIP (non-informative prior 無情報分布；例えば Jeffreys, 1961) あるいは diffuse prior という。この場合，すべての情報はデータから得られることになり，その結果は古典的統計学と数値的には一致する。しかし両者は事後分布の解釈においてまったく異なる。

ベイズの定理は，あるデータを得ることに前後するパラメータに関する二つの知識状態を結びつけているわけだが，この図式は一回のデータ取得で終了するわけではなく，循環的に任意の回数繰り返して適用することができる。すなわち，一回目のデータ取得によって得られた事後分布は，そのまま二回目のデータ取得に先立つ事前分布として使用されるという具合である。このことを k 回のデータ取得を行なう場合に一般化して示すと，次のようになる。

$$p(\underline{\theta}|\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots \underline{x}_k) \propto p(\underline{x}_k|\underline{\theta})\, p(\underline{\theta}|\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots \underline{x}_{k-1}) \qquad [5]$$

そして，このようなプロセスを繰り返すことによって，複数の人間がそれぞれ非常に異なった初期の事前分布から出発しても（例えばガンの原因というような未知の分野の研究では，研究者によって事前の知識の状態が異なっていることの方が普通であろう），それらが十分な精度のデータ系列を共通に観測してゆくことによって，ベイズの定理を使って次々に得られてくる事後分布どうしは，最終的には収束することが証明されている（安定推定の原理 principle of stable estimation; Blackwell and Dubins, 1962; Edwards et al., 1963）。これは，「データをして語らしめ，共通の認識に至る」という科学的態度に合致する性質であって，前述の事前分布の利用の場合と同様に，「常識」の論理に fit するものと言えよう。

次に，実際の計算を行なう場合に問題となることがらについて簡単に触れておく。

ベイズの定理に従って計算をしようという場合，分布型に何の制約もなく簡単に解が得られるというわけではない。尤度関数と事前分布の型や組合せ方によっては，積分がきわめてやっかいな形になったり，解析的には解けないという場合も出てくる。そのような場合の対策としては二つ考えられる。ひとつは，数値計算のテクニックを用い，コンピュータを使って強引に解いてしまう方法である。もうひとつは，採用する尤度関数に応じて，それと組み合せる事前分布を限定することによって，式全体を数学的に扱いやすい形にしてしまうという方法である。データ取得の方式についてある仮定がなされると尤度関数は一意に定まる。次に，そのようにして決まった尤度関数と組み合わせた場合に，(a)事後分布を計算しやすく，(b)得られる事後分布が事前分布と同じ形になり（次の事前分布として使用するので），(c)分布を記述する諸統計量も求めやすいような，さらには(d)多様な知識の状態に対応した表現ができる柔軟性を持った分布が探されることになる。例えば，尤度関数が二項分布の場合は，事前分布としてはベータ分布が上記の諸要件を満足する（後ほど実際の計算例を紹介する）。尤度関数が正規分布のときは，事前分布としても正規分布が用いられる。一般に関数の kernal(核) が同じ形になる分布が組み合わされる。このような分布のことを尤度に対する NCD (natural conjugate distribution 自然共役分布) と呼ぶ。

(3) ベイズ統計学の利点

ここでは，ベイズ統計学が，古典的統計学に比較してすぐれている二つの点について簡単に説明する。

確率の解釈

古典的統計学では，確率とは相対度数の極限であるとするいわゆる客観確率に基礎を置いた論理の展開がなされる。ベイズ統計学において

は，確率とは主観確率(subjective probability)である。それは，事象の生起可能性についての確信の程度を表現したものである（例えば，Ramsey，1963; DeFinetti，1937; Savage，1954)。従って，「山本浩二がホームランを打つ確率は0.1である」と言った場合には，両方の立場がこのステートメントに込めた意味合いはまったく異なるのである。すなわち，古典的立場での主張は，まったく同一の条件下での打撃を山本浩二が無限回繰り返してゆけば，その極限としてホームランを打つ確率が0.1となるという意味であって，この打席で山本浩二がホームランを打つ確からしさに直接言及しているものではない。一方ベイズの立場での主張は，まさにこの打席で山本浩二がホームランを打つことについての（ステートメントを述べた者の）確信の状態が1：9であるという意味なのである。同様の相違が，例えば信頼区間や危険率の解釈においても存在するということである。

先にも触れたことであるが，工場での品質管理などとは異なって，「同一条件下での無限回の試行の繰り返し」を想定することがむずかしい行動科学系の実験においては，結果の統計的解釈にあたってはベイズ的な確率の考え方の方が自然である。また実際の統計学利用の状況を見ても，古典的統計学の手法を利用しているにもかかわらず，故意にまたは無意識のうちにその「教義」に背いて，ベイズ的な確率の解釈をしている人が多いのではないだろうか。

主観確率を用いることに対しては古典的統計学の立場から様々な批判がなされている。例えば，主観確率が，確率が備えるべき条件に適合しているか否かが問題にされることがある。このことについては，Pratt et al.（1964）やLindley（1971）において十分な証明と反論がなされている。また，「主観的」な分布を「客観的」であるべき統計的推論のプロセスの中に持ち込むことに対する批判もある。しかし，直接手に触れることは永遠にない「客観」確率を想定することと，一旦評価されれば，それ以降の改訂プロセスがベイズの定理によってまさに「客観的」に行われる「主観」確率を用いることとでは，後者の方が第三者によって一意に検証されうるという意味において「客観的」であると言えるのではないだろうか。さらに，前述の安定推定の原理によっても，主観確率を用いることの安全性は保証されていると考えられる。

尤度原理（likelihood principle）

この原理はBarnard(1947）によって最初に提唱され，Fisher（1956）でその重要性が再確認された。その意味するところは，複数のデータ系列がすべて同一のあるいは比例関係にある尤度を持つ場合には，それらのデータから導かれる結論はまったく同じでなければならない，ということである。つまり，尤度が同じならば，データを得る方式の違いが推論に対して影響してはならないということである（尤度関数それ自体が十分統計量であるということ）。この尤度原理を満足することが良い統計量たる条件である，というがBarnardやFisherの主張したことである。ところがSavage(1961）やLindley(1972）によると，古典的統計学においては，サンプル空間をデータの採り方に基づいて定めて推論を行なうので，FisherのFiducial確率をも含めて，尤度原理を満足しない可能性があるというのである。ベイズ統計学ではこのような不都合は起らない。次にこのことを示す具体例を紹介する。

「成功」の確率がπであるベルヌーイ過程において，n個のデータを得たうちのr個が「成功」であったとする。n個中r個が「成功」でさえあれば，それがどんな系列パターンで得られていようとも尤度は同じである。ベイズ統計学の立場に立てば，尤度が同じでさえあれば，それをもたらしたデータパターンに関係なく，導き出される結論は同じである（尤度原理を満足する）。ところが古典的統計学においては，

(a)総試行数nが事前に固定されていてたまたまr個の「成功」を得たときには，モデル分布はrを確率変数とする二項分布となる。

$$p(r|n,\pi)={}_nC_r\pi^r(1-\pi)^{n-r} \qquad 〔6〕$$

また，(b) r が事前に固定されていて r 個の「成功」を得るのに n 回の試行を要したというときには，モデル分布は n が確率変数であるパスカル分布となる。

$$p(n|r,\pi)={}_{n-1}C_{r-1}\pi^r(1-\pi)^{n-r} \qquad 〔7〕$$

それぞれについて「成功」の確率の不偏推定量を求めると，(a)の場合が r/n，(b)の場合が（r－1）/（n－1）となる。尤度の同じデータを得ているにもかかわらず，データの採られかたに応じて異なったモデル分布を想定しなければならない古典的統計学においては，まったく異なった結論が導かれるのである。

ベイズ統計学の場合は，〔6〕，〔7〕の combination 記号の部分のようにパラメータを含まない部分は定数項として無視して考えるので，パラメータ π を含む kernal の部分（$\pi^r(1-\pi)^{n-r}$）が同じで，且つ事前分布が同一であれば，得られる事後分布はまったく同じになる。当然のことながら，事後分布を用いて行われる推論の結果も，データの採りかたにかかわりなくまったく同じになるのである。kernal 以外の部分も含めて計算が行われる古典的不偏推定では，同じデータを得ても，サンプル空間が異なれば，引き出される結論が異なってくるのである（尤度原理を満足しない）。

2 CADA について

CADA（Computer–Assisted Data Analysis Monitor）は，ベイズ統計学による分析のうち，ベイズの定理を用いて事前分布と尤度関数とから事後分布を求めたり，得られた分布の特性を詳細に評価したり，効用関数（utility function）と事後分布とから期待効用を求めたり，といった機械的な計算作業の部分を人間に代って実行してくれるコンピュータプログラムである。モデル分布や事前分布の選択，事後分布の解釈というような，それぞれの研究分野での専門的知識が必要とされる部分については人間の側での作業と判断が必要なのであるが，少なくとも CADA を用いることによって，計算の量とか複雑さといった，統計的分析にとっては本質的ではない要素によって研究者が悩まされることはなくなるわけである。ベイズ統計学の論理はきわめてシンプルで整合的である。しかしその論理に基づく計算の手間がかなり面倒なので，その部分をカバーしてくれる道具が Bayesian にとっては不可欠のものとなってくる。CADA はそのような必要性に応えるシステムである。

CADA の開発は Iowa 大学の M. R. Novick を中心とするグループによって1971年に開始された。1976年に最初の version（CADA 76）が公開されて以来現在に至るまで，継続的に機能の改訂・拡張の作業が続けられてきている。

CADA は，ベイズ統計学の理論や手法に精通していない人でも，CRT 上に表示される説明を理解し，指示に従って数値の入力やオプションの選択を必要に応じて行ってゆけば，逐次的・会話的にベイズ統計学に基づく分析を行なうことができるように設計されている。また，エラーからの回復が容易であり，プロセスの中を前後しながらパラメータを試行錯誤的に変えて計算を行い，結果を比較吟味できるので，第一線の研究者用の分析 tool としての使用以外にも，ベイズ統計学を学びつつある初学者のための数値実験用教材としても利用し得る。このことは CADA の開発にあたっては常に念頭に置かれてきたことである。

CADA のもうひとつの大きな特徴は，システムの移植可能性を大きくする工夫がなされている点である。記述言語として BASIC が用いられていることはそのような工夫のひとつである。しかも，メーカーによって異なる BASIC の拡張機能の部分を避けて，標準の範囲内の機能だけを用いることにより，ソースコードレベルでの互換性を確保することが配慮されている。移植可能性を大きくするためのもうひとつの工夫としては，システム全体が building–block 式の完全モジュール構造となっていることがあげられる。CADAが動く場合，すべての

プログラムが主記憶上に存在する必要はなく，当面の処理に必要なモジュールだけがファイルからその都度 load されてきて実行されるようになっている。そのような場合に問題となる計算結果や制御情報のモジュール間での受渡しは，ファイルやグローバル変数を介して行われる。このため，CADAを動かすのに必要なメモリーサイズは現在のパーソナルコンピュータの上位クラス程度でも十分であり，計算センターの利用に不便のある人にとっては，CADA を低コストで導入できる利点が出てくる。また，仮に大型機を利用できる場合でも，占有メモリーが小さくてすむので，サービスの優先順位を下げられて待たされるというようなことも少なくてすむであろう。

このような工夫がなされているため，一定の種類の命令が実行可能であって，且つ CRT，ディスク，プリンター，メモリー容量等のハードウェア面の装備が必要条件を満たすならば，どのような機種上であっても CADA を移植して動かすことができる。現在では，16ビット CPU 搭載のパーソナルコンピュータの上級クラス上でも十分実用的に稼働しうる状況となっている。

以下では，上述の CADA の特徴について，個々に詳しく説明する。

（1） 利用者が CADA を快適に使用できるための要件

CADA の利用者がシステムを快適に使用できるためには，システムと利用者との接触面において，多くの条件が満足されていることが必要である(Novick, 1975; Novick et al., 1977; Novick, 1978)。以下ではそれらのうちの主な事項を列挙しておく。

a. 利用者の側に BASIC や FORTRAN 等の手続向き言語についての知識がまったくなくとも，また，やっかいなシステム特有の命令についての理解がなくとも，それらを知っている者と同じくらい自由にシステムを使いこなせるような工夫が必要である。

b. システム側からの説明・指示の表示装置としてはハードコピー装置付の CRT が望ましい。TSS の端末で使用する場合は，回線の伝送速度は少なくても1200 bps 以上であること。あまり遅いと使っていてストレスを感じる。

c. 判断や量的評価やオプションの指定等を行なう際に必要な情報は，すべて同じ画面上に要約されて一覧表示されているか，簡単な手続によって自由に参照できることが必要である。画面から目を離すことなく，キーボードから手を離すことなくすべての処理を進めてゆけるということが理想的である。

d. ベイズ統計学や CADA についての知識レベルは利用者によって様々であるので，システムから出力するシステムに関する説明の詳しさについては，利用者の側で選択できるものであること。

e. コンピュータを用いて対話的に統計的処理を進めることに不慣れな利用者は，設計者の側からは予測もできないような誤操作や思い違いをするものである。例えば，数学上ありえないパラメータの値を与えたり，システムが要求する個数のパラメータを指定しなかったり，自分が考えているのとはまったく違うオプションを選択してしまったり。キーボードのモード設定を間違って意味のないキーを押してしまったり，等々。このような誤操作に起因するエラーからの回復が容易であること。

f. e とも関連することであるが，CADA では利用者が入力するストリングはできるだけ単純なものであること。

(2) CADA の想定利用者

本節のはじめでも述べたように，CADA の設計者達が想定した利用者には二通りある。第一の想定利用者は，ベイズ統計学の立場に立って自分のデータを分析したいと考えている研究者や実務家である。特に行動科学や生命科学関係の分野の研究者の中には Neyman–Pearson 流の古典的統計学の諸概念，例えば確率を相対度数の極限と考えること，危険率の決めかたが

恣意的であること，標本のサイズさえ大さくとればほとんど確実に帰無仮説を棄却できること，また，棄却されることが分ったとしても，そのことが新しい情報をほとんどもたらしてはくれないような仮説検定法そのもの，尤度原理を満足しないこと，新たにデータを採る前に研究者が持っている事前の知識を整合的にデータと結合する方法が存在しないこと，等々の不都合に気付き，不満を持っている人は多いと思われる。そのような研究者達こそがベイズ統計学のそして CADA の第一の「市場」を形成している。

もう一方の想定利用者は，ベイズ統計学を学び始めたばかりの初学者である。統計学を学ぶ過程では，データ分析を指向するかぎり，理論的な面とそれを実際のデータ分析に適用した場合の結果という二つの側面の間を頻繁に往復しながら理解を深めてゆくことが必要である。そのような状況において，CADA は最適なシミュレーターもしくは教材となるのである。いろいろな分布の統計量や確率的指標を計算したり，分布型を視覚化したり，また，パラメータを変えることによってそれらがどう変化するかを調べたり，ベイズの定理を用いて事後分布の計算をしたりという作業は，数表や電卓を用いた手作業ではかなりの労力を要するものであり敬遠されがちであるが，データ分析の「感覚」を養ううえでは必須の教程である。CADA を使えばこのような作業はすべて自動的に行なうことができる。

その他，CADA 78以降には，データを抱えてはいるが統計的分析法の知識を持っていないため，どのように分析したらよいか分らないという人の相談に乗って，実際に CADA で処理をして見せながら適切な分析方法をアドバイスしていくというような状況のもとで便利に使える機能も付加されている(consulting 機能)。

(3) CADA の設計において特に考慮されたこと

前述(1)，(2)で示された条件を満足するために，CADA の設計にあたっては特に次の3点が考慮されている。

a. 利用者にとって必要なシステムに関する知識は，装置を stand-by 及び off の状態にする方法，OS 及び BASIC の立ち上げ方，CADA を load してスタートさせる方法及び終了させる方法，の三種類だけである。CADA とのコミュニケーションの形式は可能なかぎり単純化されていて，数値やオプション番号の入力だけでシステムをコントロールできるようになっているので，利用者は BASIC の文法についての知識がまったく無くても CADA を望み通りに動かすことができる。

また，CADA はその内部にドキュメンテーション機能を持っているので，SPSS 等一般のパッケージプログラムを使う場合に必要となる分厚いマニュアルは不要である。利用者は処理の流れの要所要所で，必要な説明を画面上で読むことができる。

b. 処理の途中でエラーが発生して BASIC のレベルでコンピュータが停止してしまうという現象は，コンピュータを使用している人ならしばしば経験することである。そのような状態から，エラーを修正して後続の処理を実行させることができるためには，BASIC についての，さらには算法のロジックにまで立ち入った知識が必要となる。**a** でも述べたように，CADA においては利用者の側にそのような知識があることが想定されていないので，エラーそのものが発生しにくいような工夫が念入りになされている。入力の後では必ず値の個数や値域のチェックがなされているし，計算の流れの途中では zero-divide やループの無限化防止のチェックがなされている。そのため，通常の使用状態では，入力値のせいで CADA が abort することはめったにない。

c. CADA を用いて探索的なデータ分析を行なう場合は，幾通りかの処理を試みた後に結果を比較検討して，後付け的に適切な事前分布なりモデル分布なりを特定しようという場合も多い。また，初学者が CADA の中で「道に迷

い」，考えてもいない迷路のなかに入り込んでしまってから，何とかして元の位置まで戻ろうとするという場合もある。これらはいずれもCADA の側から見れば，システムを構成しているモジュール間を制御が移動している状態ということになる。CADA は，このような機能を保証するためとシステムを柔軟に拡張できるようにするため，完全なモジュール構造で成り立っている。

CADA は構造上，三つのレベルに分けられる。一番上のレベルは component レベルと呼ばれ，分析の手法や想定する分布型ごとに分類されている（表-1）。各 component の下には

表-1 CADA77 の component 一覧表

COMPONENT #	CONTENTS
1	Data management
2	Data file catalogue
*3	Probability distribution
*4	Binary models
*5	Univariate normal models
*6	Multi-category models
*7	Simple regression and correlation
8	Utilities and expected utilities
9	Simultaneous estaimtion of proportions
10	Simultaneous estimation of means
11	Multiple regression and correlation
12	Simultaneous prediction in m-groups
13	Educational and employment selection
15	One-way model I ANOVA
16	Multiway model I factorial designs

(1) component 14: Selection of educational treatments は CADA77 ではまだ implement されていない。
(2) *印は μCADA でサポートする予定の components。

表-2 component 4: Bin ry models の下に属するmodel

MODEL #	CONTENTS
1	Beta binomial model
3	Beta Pascal model
5	Comparison of two proportions

model 2: Mixed beta binomial model. model 4: Mixed beta Pascal model. model 6: Gamma Poisson model は CADA 77 ではまだ implement されていない。

表-3 Beta binomial model の下に属する module 及び対応するルーチン名

MODULE #	CONTENTS and ROUTINES
1	Prior distribution on proportion (π) CMOD2 → CMOD3. CMODAB
2	Preposterior analysis CMODAB
3	Posterior distribution on (π) CMOD3 → CMODB, CMOD2, DMoDX
4	Predictive distributions CMODX → CMODB
5	Posterior intervals for π CMODB → CMODX, CMODY

model のレベルがある。例えば component 4 の "Binary models" の下には三つの model が用意されている（表-2）。model の下には module と呼ばれる処理の単位があり，実際のプログラム単位とほぼ一対一に対応している。表-3 に model 1 の "Beta binomial model" の下に設けられている module 及びその処理にあたっているプログラム単位名を示す。

そして，このような三レベル構造のさらに上位にはCMONTR というスーパーバイザーがあって，各 component, model, module への分岐を管理している。さらに，エラー発生時にCMONTR のレベルへ制御を復帰させるためのCERROR というルーチンと，条件を変えて再計算をする場合に駆動される RSTRT という補助的ルーチンとが一体となって，CADA の骨組を形成している。これらは BASIC の CHAIN 文によってメモリー上に load され実行される。

毎年のように行われる CADA の改訂は，主に component, model, module の単位が増結され，CMONTR の一部がそれに合せて変更されるという形でなされている。このことは別の見方をするならば，CADA を導入する場合には，自分に必要な component, model, module だけを選択したり，サポートされていない機能については既存の部合とのインターフェースを調整して，自分でプログラムを作ってしまえば，「オーダーメイド」の CADA を作ることも可能だということである。

3. パーソナルコンピュータ用サブセット版 CADA の開発

(1)　μCADA について

μCADA は CADA77 の IBM 版をベースに，IF 800/50（沖電気工業製の16ビット CPU 搭載のパーソナルコンピュータ。メモリーは 750 KB，1MB のフロッピディスクが2台装着されている。OS は MS-DOS 1.0，BASIC は Microsoft 系の O-BASIC。）上で走るように改造された CADA のサブセット版である。先にも述べたように，研究者にとっては常にフルサイズの CADA が必要なわけではないので，年々肥大してゆく CADA の必要部分だけを切り取って，小規模のハードウエア構成上でも使える個々の研究者専用の「パーソナルCADA」を作ることには十分に意味がある。かつて CADA 78の開発の際に，IMSAI や ALTAIR，Radio Shack 等の8ビット CPU のパーソナルコンピュータ上で CADA を動かせるようにする計画が立てられたものの，容量，速度，演算精度等が問題となり途中で放棄された経緯があるが（Novick，1978），現在では，IF 800/50クラスの性能があれば，十分に実用に耐える single user CADA を作ることができる。

現在，第一期分の計画として，表-1に示した component 3（Probability distribution）から component 7（Simple regression and correlation）までの implementation 作業が進行中である。その一部については，正常に動作することが確認済であり，実際のデータ処理にも使用している。

(2)　μCADA の仕様

μCADA は component の種類がフルサイズの CADA の半分程度であること以外は CADA としての基本的性能・構造を備えている。CMONTR は将来の拡張に備えてフルセット版と同じものが入っている。但し，現時点で implement されていない component が選択された場合は，制御が component 選択のポイントまで戻るように変更が加えられている。その他 O-BASIC にはマトリクス入出力機能がないので，FOR ループによる代用がなされているとか，ファイルの利用形式や出力の際の書式指定方式の翻訳変換とかといった文法上の変更が加えられている。さらに，オリジナルのプログラムでは GOTO 文や GOSUB 文が多用されていて，処理の流れがスパゲッティのように入り組んでいるのを，一部について，処理の流れを分りやすくするために整理してある。算法についても，収束精度の判定方法や基準値を O-BASIC 向きに変更したり，あるいは算法自体を変更したところもある。

(3)　μCADA の実行例

ここでは component 4 の Binary models を用いた実際の計算例を示す。リストは CRT 上のイメージをプリンターへ同時に出力したものである（図-2）。

ここの例で設定した状況は次の通りである：A氏はプロ野球セリーグ公式戦中に，山本浩二の打撃を45回観察した経験に基づいて，山本浩二がヒットを打つ確率 (π) についてのある事前分布を心に持っている（図-1）。A氏が日本シリーズ第X戦に山本浩二が5打数3安打したこと

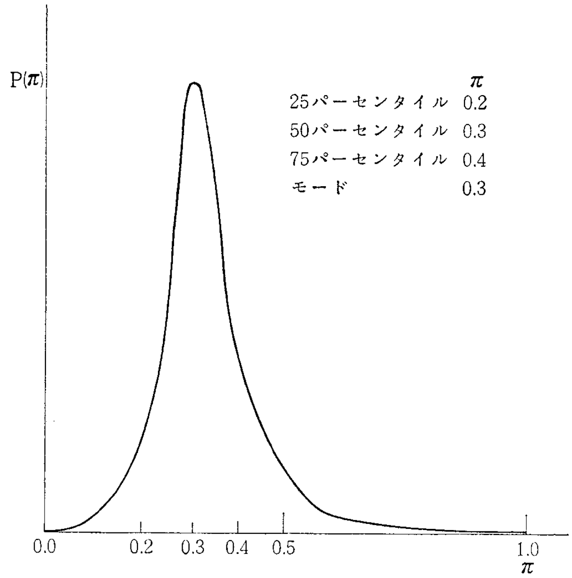

図1　山本浩二がヒットを打つ確率に関するA氏の事前分布（A氏が描いたもの）

```
RUN
```

下線を引いた数字は A 氏の入力部分

```
    THE COMPUTER ASSISTED DATA ANALYSIS (CADA) MONITOR

If you want an explanation of the CADA monitor type '77'.
If you want a listing of the components type        '99'.
If you want a particular component type its number.
? 99

------------ COMPONENTS OF CADA MONITOR --------------
 COMPONENT  1. DATA MANAGEMENT
 COMPONENT  2. DATA FILE CATALOGUE
 COMPONENT  3. PROBABILITY DISTRIBUTION
 COMPONENT  4. BINARY MODELS
 COMPONENT  5. UNIVARIATE NORMAL MODELS
 COMPONENT  6. MULTI-CATEGORY MODELS
 COMPONENT  7. SIMPLE REGRESSION AND CORRELATION
 COMPONENT  8. UTILITIES AND EXPECTED UTILITIES
 COMPONENT  9. SIMULTANEOUS ESTIMATION OF PROPORTIONS
 COMPONENT 10. SIMULTANEOUS ESTIMATION OF MEANS
 COMPONENT 11. MULTIPLE REGRESSION AND CORRELATION
 COMPONENT 12. SIMULTANEOUS PREDICTION IN M-GROUPS
 COMPONENT 13. EDUCATIONAL AND EMPLOYMENT SELECTION
 COMPONENT 15. ONE-WAY MODEL I ANOVA
 COMPONENT 16. MULTIWAY MODEL I FACTORIAL DESIGNS
Explanation=77   Component listing=99  Exit=0  or component ? 4

   COMPONENT 4. BINARY MODELS
```

Binary models を選択

```
   1. BETA BINOMIAL MODEL
   3. BETA PASCAL MODEL
   5. COMPARISON OF TWO PROPORTIONS


If you want an available model type its number else '0'.
? 1
```

Beta binomial model を選択

```
              BETA BINOMIAL MODEL

        1.PRIOR DISTRIBUTION ON PROPORTION (PI)
        2.PREPOSTERIOR ANALYSIS
        3.POSTERIOR DISTRIBUTION ON PI
        4.PREDICTIVE DISTRIBUTIONS
        5.POSTERIOR INTERVALS FOR PI


If you want an available module type its number else '0'.? 1
```

事前分布の評価を行なう

```
     PRIOR DISTRIBUTION  --  BETA-BINOMIAL MODEL

 This module will assist you in fitting a beta distribution
to your prior beliefs about PI.  We begin by asking you to
specify the 25th, 50th and 75th percentiles of your prior
distribution.

Specify 25th.   Your betting odds are 3 to 1 that PI is
greater than this value.  ? .2

Specify 50th.   Your betting odds are even that PI is
greater than this value.  ? .3

Specify 75th.   Your betting odds are 1 to 3 that PI is
greater than this value.  ? .4
```

各パーセンタイルを入力する

```
Possible approximate distributions are being computed.
```

```
Here are some of the percentiles of four beta distributions
that have been fitted to your percentile specifications.

          10th   25th   50th   75th   90th
   1      .13    .20    .30    .41    .52
   2      .15    .21    .30    .40    .50
   3      .14    .21    .30    .41    .51
   4      .14    .21    .30    .41    .50
```

上の spec. に合致する分布の候補

```
Compare the percentiles of these distributions and decide
which most closely corresponds to your prior beliefs.
You can either tentatively accept this distribution or
respecify the percentiles.

If you want one of these distributions type its number.
If you want to respecify the percentiles type '0'
? 2
```

2番目の候補を事前分布として採用する

```
Here are some characteristics of the beta distribution you
are now considering.

     Hypothetical sample size (m)    11.03
     10th percentile                   .15
     25th percentile                   .21
     50th  (median)                    .30
     75th percentile                   .40
     90th percentile                   .50
     50% HDR                       .18 - .37
     75% HDR                       .13 - .44
     95% HDR                       .07 - .57
```

HDR: Highest Density Region

```
If you don't feel that the hypothetical sample size (m)
reflects your prior information about PI you can specify a
different value for m.  This will not affect the median but
will change the HDRs and other percentiles.  A larger m will
result in shorter intervals, and a smaller m in longer ones.

If you want to change m type new value ( min =  6.000 ).
If you don't want to change m type '0'? 45
```

45回の打撃を観測したことに基づく分布に変更する

```
Here are some characteristics of the beta distribution you
are now considering.

     Hypothetical sample size (m)    45.00
     10th percentile                   .22
     25th percentile                   .26
     50th  (median)                    .30
     75th percentile                   .35
     90th percentile                   .39
     50% HDR                       .25 - .34
     75% HDR                       .22 - .38
     95% HDR                       .18 - .44
If you want to change m type new value ( min =  6.000 ).
If you don't want to change m type '0'? 0

To change the centering of the distribution. specify
a different median.   This will not affect the value of m .
If you want to change median type new value else '0' .? 0
```

```
Graph of your prior beta 99.0% HDR
    0.14 I**
    0.16 I*****
    0.18 I*********
    0.20 I*********I******
    0.22 I*********I*********I****
    0.23 I*********I*********I*********I***
    0.25 I*********I*********I*********I*********I*
    0.27 I*********I*********I*********I*********I*******
    0.29 I*********I*********I*********I*********I*********I
    0.31 I*********I*********I*********I*********I*********
    0.32 I*********I*********I*********I*********I******
    0.34 I*********I*********I*********I*********I*
    0.36 I*********I*********I*********I****
    0.38 I*********I*********I******
    0.40 I*********I*********I
    0.41 I*********I****
    0.43 I*********
    0.45 I******
    0.47 I****
    0.49 I**
If you wish to change your prior. type '1'. else '0' .? 0
```

事前分布のグラフ化
図－1と非常に類似した形となっている

```
Here are some of the characteristics of the prior
distribution fitted to your prior beliefs about PI .

        Parameter A                      13.72
        Parameter B                      31.28
        Mode                               .30
        10th percentile                    .22
        25th percentile                    .26
        50th  (median)                     .30
        75th percentile                    .35
        90th percentile                    .39
        50% HDR                        .25 - .34
        75% HDR                        .22 - .38
        95% HDR                        .18 - .44
This completes the fitting of a prior distribution on PI .
If you are not going to continue with the analysis at this
time you should record the parameters of your prior.

If you want to continue the analysis  type '1'. else '0'.? 1

If you want to do a preposterior analysis type '1'. else '0' .? 0
```

事前分布として採用したベータ分布のパラメータ

```
         POSTERIOR ANALYSIS  BETA-BINOMIAL MODEL

Input number of sample observations.? 5

Input number of successes.? 3
```

日本シリーズ第X戦、山本浩二は5打数3安打した

```
Some of the characteristics of the posterior distribution are
being computed.
```

SUMMARY OF BETA-BINOMIAL ANALYSIS

PRIOR	BETA DISTRIBUTIONS	POSTERIOR
13.72	PARAMETER A	16.72
31.28	PARAMETER B	33.28
.0679	STANDARD DEVIATION	.0661
.22	10th PERCENTILE	.25
.26	25th PERCENTILE	.29
.30	50th PERCENTILE	.33
.35	75th PERCENTILE	.38
.39	90th PERCENTILE	.42
.30	MEAN	.33
.30	MODE	.33
.25 - .34	50% HDR	.28 - .37
.22 - .38	75% HDR	.25 - .41
.18 - .44	95% HDR	.21 - .46

事前分布と事後分布の比較

```
If you want to evaluate the posterior type '1' .
If you want to evaluate the predictive distribution type '2'
Otherwise type '0' .? 1
```

```
            Evaluation of a beta distribution

This module allows you to examine the characteristics of a
beta distribution.


Type the number of the option you want.
    1. Percentiles
    2. Highest density regions
    3. Probability PI is less than some value
    4. Probability PI is between two values
    5. Graph of the density function
    6. Exit
? 5

Option 5: Graph of the density function over 99% HDR
-----------------------------------------------------------
Beta          A=  16.72         B=  33.28
           Mean=0.33          SD=0.06606
-----------------------------------------------------------
These are the parameters of the distribution to be graphed
When you are ready for the graph to be displayed type '1'.
? 1

    Graph of beta (  16.72 ,  33.28) 99.0% HDR
    0.18 I**
    0.19 I****                              事後分布のグラフ化
    0.21 I*********                5打数3安打したことにより、モードが高打率側に移動している
    0.23 I*********I*****
    0.25 I*********I*********I**
    0.26 I*********I*********I*********I*
    0.28 I*********I*********I*********I*********
    0.30 I*********I*********I*********I*********I*****
    0.32 I*********I*********I*********I*********I*********
    0.33 I*********I*********I*********I*********I*********I
    0.35 I*********I*********I*********I*********I*******
    0.37 I*********I*********I*********I*********I**
    0.39 I*********I*********I*********I*****
    0.40 I*********I*********I********
    0.42 I*********I*********I
    0.44 I*********I****
    0.46 I*********I
    0.47 I******
    0.49 I****
    0.51 I**                                                  Continue = 1
? 1

Type the number of the option you want.
      1. Further evaluate this distribution
      2. Evaluate predictive distribution.
      3. Exit module.
? 3

Type the number of the option you want.
     1. Restart at the beginning of this module.
     2. Select a different module of this model.
     3. Select a different model of this component.
     4. Select a different component.
     5. Exit CADA monitor.
? 5
Break in 580
Ok
```

を知ったことにより，彼の心の中のπの分布がベイズの定理によってどのように変化させられるかを示す。

(4)　μCADA 開発の今後の計画について

当面は component 7 までを完動させることが目標であるが，近い将来，最新のフルセット版への version-up を考えている。同時に，メッセージの日本語化，入出力モードの多様化（デジタイザや測定機器からの直接入力，プロッタやグラフィックディスプレイへのイメージ出力），オプション機能の追加等の機能強化を計画している。

附　記

＊本稿は，現在東京工業大学の繁桝算男助教授が，東北大学在職中に授業や研究会の場で講義されたことに基づいて，筆者なりに理解したことの一部をまとめたものである。繁桝先生には，CADA の入手に際しても大変便宜をはかっていただいた。ここに記して感謝致します。

＊本稿は昭和58年度及び昭和59年度の仙台大学新規研究予算を得て行われた研究の一部を報告したものである。

引用・参考文献

Barnard, G. A. (1947) A review of "Sequential analysis" by Abraham Wals. J. Amer. Statist. Assoc., 42, 658–669.

Bayes, T. (1763) Essay toward solving a problem in the doctrine of chances. Phil. Trans. Roy. Soc., 53, 370–418. (Reprinted: Biometrika, 1958, 45, 293–315.)

Blackwell, D. & Dubins, L. (1962) Merging of opinions with increasing information. Ann. Math. Statist., 33, 882–886.

Box, G. E. P. & Tiao, G. C. (1973) *Bayesian iuference in statistical analysis.* California: Addison–Wesley.

De Finetti, B. (1937) Forsight: Its logical laws, its subjective sources. Annales. de I' Institut Henri Poincare, 7. (Reprinted in H. E. Kyburg, Jr. & H. E. Smokler eds. *Studies in subjective probability.* New York: Wiley, 1964)

DeGroot, M. H. (1970) *Optimal statistical decisions.* New York: McGraw–Hill.

Edwards, W., Lindman, H., & Savage, L. J. (1963) Bayesian statistical inference for psychological research. Psychol. Rev., 70, 3, 193–242.

Fisher, R. A. (1956) *Statistical methods and scientific inference.* New York: Hafner.

Isaacs, G. L., Dekeyrel, D., & Novick, M. R. (1976) CADA–1976: The research report. Iowa City: The University of Iowa.

Jeffreys, H. (1961) *Theory of probability. 3rd ed.* Oxford: Clarendon.

Lindley, D. V. (1965) *Introduction to probability and statistics from a Bayesian viewpoint. Part* 1 & 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Lindley, D. V. (1971) *Making decisions.* London and New York: Wiley Interscience.

Lindley, D. V. (1972) Bayesian statistics, a review. SIAM.

Novick, M. R. (1970) Bayesian considerations in educational information systems. ACT Research report No. 38. Iowa City: The American College Testing Program.

Novick, M. R. & Jackson, P. H. (1974) *Statistical methods for educational and psychological research.* New York: McGraw–Hill.

Novick, M. R. (1975) A course in Bayesian statistics. The Amer. Statist., 20, 2, 94–98.

Novick, M. R., Isaacs, G. L., & Dekeyrel, D. F. (1977) Computer–assisted data analysis–1977. Iowa City: The University of Iowa.

Novick, M. R. (1978) Annual report for the CADA users group. Iowa City: The Univ. of Iowa.

Phillips, L. D. (1973) *Bayesian statistics for social scientists.* London: Thomas Nelson and Sons.

Pratt, J. W., Raiffa, H, & Schlaiffer, R. (1964) The foundation of deicsion under uncertainty: An elementary exposition. J. of Amer. Stat.

Assoc., 59, 353-375.
Ramsey, F. D. (1963) *The foundations of mathematics and other logical essays.* London: Kegan.
Savage, L. J. (1954) *The foundations of statistics.* New York: Wiley. (New York: Dover, 1972)
Savage, L. J, (1961) The foundations of statistics reconsidered. In J. Neyman(ed.) Proceedings of the forth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, 1. Berkeley: Univ. of California Press.
Schlaifer, R. (1959) *Probability and statistics for business decisions.* NewYork: McGraw-Hill.
繁桝算男 (1976) ベイズ統計学の心理学的データへの適用。心理学評論, 19, 2, 95-115.
繁桝算男 (1983) 児童心理学と数量的方法。児童心理学の進歩 1983年版, 276-290. 東京：金子書房。
Winkler, R. L. (1972) *Introduction to Bayesian inference and decision.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Computer-Assisted Bayesian Data Analysis System
—Development of μCADA—

Toshiaki SUZUKI

The history and the philosophy of Bayesian Statistics are briefly surveyed together with the current development in computer-assisted Bayesian data analysis system (CADA monitor). First, Bayesian Statistics is characterized as an only method to provide coherent inferences. It can combine prior information and newly observed information to provide probabilistic statements about parameters in question. So it is concluded that the future direction for data analysis in behavioral sciences must be along the Bayesian orientation. Then an example of the use of Bayesian ideas to an experimental data using small computer systems is introduced (μCADA).